

January 2006

Concepciones de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Ciencias de la Computación sobre el concepto de número natural, una caracterización

Joaquín Restrepo Becerra
Universidad de La Salle, jrestrepo@jupiter.lasalle.edu.co

Johana Andrea Torres Díaz
Universidad de La Salle, jtorres@lasalle.edu.co

Follow this and additional works at: <https://ciencia.lasalle.edu.co/ap>

Citación recomendada

Restrepo Becerra, J., y J.A. Torres Díaz. (2006). Concepciones de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Ciencias de la Computación sobre el concepto de número natural, una caracterización. *Actualidades Pedagógicas*, (48), 39-53.

This Artículo de Investigación is brought to you for free and open access by the Revistas científicas at Ciencia Unisalle. It has been accepted for inclusion in Actualidades Pedagógicas by an authorized editor of Ciencia Unisalle. For more information, please contact ciencia@lasalle.edu.co.

Concepciones de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Ciencias de la Computación sobre el concepto de número natural, una caracterización¹

Joaquín Restrepo Becerra* / Johana Andrea Torres Díaz**

RESUMEN

El presente escrito tiene como origen el proyecto de investigación titulado «*Caracterización de las concepciones de estudiantes para profesor de matemáticas sobre el concepto de número natural*»; trabajo desarrollado en la Universidad de La Salle de Bogotá, el cual tiene por objeto caracterizar las concepciones de los estudiantes de la licenciatura sobre el tópico matemático referido. Indagar sobre las concepciones matemáticas de los estudiantes permite conocer acerca de los errores que cometen, ya sea en la resolución de problemas y ejercicios matemáticos o cuando deben argumentar sobre procedimientos, algoritmos y aspectos teóricos vinculados con problemas prácticos inclusive. El proyecto investigativo sobre el cual hace referencia el presente artículo, se inscribe en la perspectiva metodológica cualitativa, con un diseño de tipo descriptivo, se trata también de un trabajo de tipo básico, seccional, micro-social Sierra (2001). Se obtiene como resultado, que los estudiantes en la

Licenciatura en Matemáticas y Ciencias de la Computación tienen las siguientes concepciones sobre los números naturales: «*los números naturales como representación de cantidades*» y «*los números naturales con estructura de campo*». Aunque estas concepciones no son correctas, dado que no corresponden a alguna definición formalmente establecida en matemáticas para el conjunto de los números naturales, dan cuenta de las ideas que tienen los estudiantes sobre el tópico matemático en consideración.

Palabras clave: números naturales, concepciones, conceptos matemáticos, didáctica de las matemáticas.

1 Investigación financiada por la Universidad de La Salle, Bogotá.

* Profesor Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de La Salle. Correo electrónico: jrestrepo@jupiter.lasalle.edu.co

** Profesora Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de La Salle. Correo electrónico: jtorres@lasalle.edu.co

Fecha de recepción: 28 de marzo de 2006.

Fecha de aprobación: 28 de abril de 2006.

A CHARACTERIZATION OF THE CONCEPT OF NATURAL NUMBER BY THE STUDENTS OF THE BA IN TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTING SCIENCES

ABSTRACT

This report has its origin in the research project: «*Characterization of the student-teachers conceptions on the natural number concept*», done at Universidad de La Salle in Bogotá. The project's goal is to characterize the conceptions the students in the BA have on that mathematical topic. To inquiry about the mathematical conceptions of the students allows us to know about the mistakes they make, either in problem solving and mathematical exercises or when they have to defend procedures, algorithms and theoretical aspects linked even with practical problems. The research project this article is based on, belongs to the qualitative methodological perspective, with a descriptive type design, it is also a basic, micro-social and sectional work (Sierra, 2001). As a result,

the students of the BA in Teaching Mathematics and Computing Sciences have the following conceptions of the natural numbers: «*the natural numbers as representation of quantities*» and «*the natural numbers with field structure*». Although, these conceptions are not correct since they do not correspond to any definition formally established in mathematics for the set of natural numbers, they show the ideas that the students have about this mathematical topic.

Key Words: natural numbers, conceptions, mathematical concepts, mathematics didactics.

INTRODUCCIÓN

El concepto de número natural se considera de gran importancia en el estudio de las matemáticas, por cuanto surge inicialmente de procesos naturales de conteo casi tan antiguos como la humanidad misma y permite establecer condiciones iniciales de estudio para estructuras conceptuales en matemáticas tales como la aritmética y el análisis, entre otros. Al parecer, en la actualidad el conocimiento y uso cotidiano de este concepto es más de carácter intuitivo por no decir elemental; se resuelven operaciones aritméticas elementales y conteos sencillos, sin mayor comprensión y justificación de los procedimientos inherentes.

En didáctica de las matemáticas, es de interés conocer y comprender los procesos asociados con la adquisición del conocimiento matemático, ámbito en el cual, han tomado relevancia términos como: concepción, creencias, representaciones, imágenes conceptuales, entre otros. Puede decirse que la orientación hacia éste tópico de investigación, radica en que el estudio de las concepciones permite por ejemplo: evidenciar gran diversidad en los puntos de vista sobre un mismo objeto matemático, diferenciar las diversas representaciones y modos de tratamiento que están asociadas con las mismas, resaltar su adaptación a la solución de los problemas en los cuales intervienen, ayudar al didáctico en la comprensión de los presupuestos sobre la transparencia de la comunicación didáctica, diferenciar entre los saberes que la enseñanza desea transmitir y los conocimientos que efectivamente son logrados por el estudiante.

La caracterización de las concepciones de los estudiantes, se entiende como una herramienta para el análisis del saber acerca de los errores que cometen y para el diseño de situaciones que faciliten el aprendizaje de conceptos matemáticos y la comprensión sobre los procesos que conducen a dicho aprendizaje.

Estudiar las concepciones que tienen los estudiantes de matemáticas respecto al número natural, es pertinente entre otras razones porque: este concepto se presenta en el currículo escolar en los cursos iniciales de la educación básica, no existe suficiente literatura acerca de este particular, las concepciones que tienen los estudiantes constituyen un referente para establecer que tan próximos se encuentran ellos del concepto formalmente establecido y permiten revelar la existencia o no de concepciones erróneas, inconsistentes o incompletas.

Como hipótesis de trabajo en la investigación sobre la cual se soporta el presente escrito, se establece que los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Ciencias de la Computación, poseen concepciones sobre los conceptos matemáticos; en particular, sobre el concepto de número natural, puesto que ellos tienen algunas ideas de tales conceptos (por ejemplo, los significados de las palabras en el marco del lenguaje natural), derivadas de las asociaciones que hacen en su interacción con situaciones de su entorno sociocultural y una experiencia escolar en la cual los han utilizado y estudiado.

Se propuso para el desarrollo del proyecto investigativo una perspectiva metodológica cualitativa de carácter descriptivo, considerando lograr el mejor acercamiento a los estados afectivos y cognitivos experimentados por el estudiante en su proceso de construcción del conocimiento. El objetivo principal de la investigación consiste en «caracterizar las concepciones sobre el número natural, manifestadas por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Ciencias de la Computación, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de La Salle de Bogotá».

Por otra parte, un estado actual de las condiciones en las cuales se encuentra la problemática asociada con las concepciones que poseen los estudiantes de matemáticas sobre conceptos matemáticos y en

particular sobre el número natural, puede ayudar en la comprensión del por qué adelantar un trabajo investigativo como el que da lugar al presente escrito. Para tal efecto, se hace referencia sobre algunos de los trabajos que tienen relación con la caracterización de concepciones matemáticas ya sea en estudiantes o profesores:

Concepciones en docentes de preescolar y básica primaria hasta sexto grado, acerca de la noción de número natural (Ojeda y Parra, 1997); Números Reais: Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura (Farias *et al.*, 1999); Prospective Elementary Teachers Conceptions of Rational Numbers (Tirosch *et al.*, 2000); Concepciones de estudiantes de Licenciatura en matemáticas sobre números reales (Mora *et al.*, 2004); El Análisis de Contenido Matemático como Herramienta para la Construcción de Modelos Pedagógicos: El caso de la función cuadrática (Carulla y Gómez, 1998); Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos. Los procesos de contar e inducir (Luque *et al.*, 2000); Concepciones y creencias del profesor universitario de matemáticas sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Aportaciones teóricas a un marco teórico de investigación Moreno (1995, citado por Prefán y Bravo, 2002).

Es de resaltar, que en el período 1990-2005, se encontró solo un trabajo relacionado con la caracterización de concepciones en profesores o estudiantes de matemáticas, sin embargo, como se puede observar en las anteriores referencias (sobre las cuales se encuentra mayor información en el informe final del proyecto de investigación) se hallaron algunos trabajos que si bien, no corresponden totalmente al problema de investigación tratado en el trabajo investigativo del cual trata este documento, se aproximan a algunos de los tópicos considerados.

Con base en varias investigaciones y escritos en educación matemática (incluyendo los anteriormen-

te mencionados) en los cuales aparece el término concepción, se encuentra que éste se ha asociado a expresiones como: imágenes conceptuales, creencias, imaginarios, etc.; en particular, se encuentra también que algunos autores no diferencian explícitamente *concepción de creencia*.

A partir de tales trabajos y teniendo en cuenta cierta diversidad de matices, algunos autores se refieren al término concepción de la siguiente manera:

Ruiz (1993), Flores (1998), Medina (2001), Mora y Torres (2004), establecen una tipología de las concepciones diferenciando las cognitivas (individuales o subjetivas) de las epistemológicas (también conocidas como colectivas). Las cognitivas o subjetivas se refieren al conocimiento interno del sujeto, pueden surgir de manera espontánea o inducidas por procesos de enseñanza y/o de aprendizaje. Mientras que las epistemológicas o colectivas, se relacionan con los tipos de conocimiento de «una comunidad», que existen en un determinado período histórico o en los textos, programas y currículos escolares para algún nivel determinado. Estas concepciones se refieren a problemas dentro de la propia disciplina, su relación con otras disciplinas y a la manera en que se accede al los saberes.

También se hace una diferenciación entre concepción global y concepción local, para ambos tipos de concepciones mencionados anteriormente (cognitivas y epistemológicas). De acuerdo con el discurso de Ruiz (1993), las concepciones globales describen desde la generalidad las concepciones ligadas a un concepto u otro objeto matemático, mientras que las concepciones locales atienden aspectos parciales de los mismos.

Thompson (1992), presenta el término concepción como una estructura mental de carácter general que incluye: «*creencias, significados, conceptos, reglas, imágenes mentales y preferencias concientes o incons-*

cientes» «Una característica de las concepciones es que pueden ser consideradas desde distintos grados de convicción y no son consensuadas» (Thompson, 1992). En este sentido, las concepciones se asocian con un conjunto de ideas personales que de alguna manera están relacionadas con un saber particular y no necesariamente en forma exclusiva con los conceptos propiamente dichos, dado que estos quedan incluidos en las estructuras mentales de carácter general que son representadas por las concepciones.

También, se puede inferir, que una persona puede adquirir un alto grado de compromiso con un punto de vista o puede considerar una hipótesis como más fuerte que otra, pero no puede decir categóricamente que conoce un hecho, puesto que esto forma parte del ámbito del conocimiento propiamente dicho. Se considera que las concepciones no son objeto de consenso, dado que todo aquello sobre lo cual es posible plantear discusión y controversia se asocia con concepciones y todo lo que está relacionado con la verdad o falsedad, se asocia con el conocimiento. Se dice del conocimiento que debe satisfacer condiciones de validez mientras que las concepciones no.

En una investigación realizada por Artigue (1984, citado por Ruiz, 1993) sobre las concepciones que los estudiantes asocian con un objeto matemático, se refiere al uso que se da al término concepción -del sujeto- en didáctica de las matemáticas, para distinguir el concepto matemático que es único de las diversas significaciones que le son asociadas por parte de quien lo aprende. Artigue se refiere a las expresiones «concepción global» como un constructo teórico inobservable y los aspectos parciales de la misma que son inferidos a partir de las respuestas de los estudiantes en eventos de carácter evaluativo y, «concepción local» como aquella que se manifiesta en una situación asociada con un saber puesto en juego y los diferentes tipos de problemas en cuya resolución interviene.

«Distinguiremos en las concepciones de los temas, sus diversos componentes y en particular: la clase de situaciones problema que dan sentido al concepto para los estudiantes; el conjunto de significantes que es capaz de asociársele, en particular las imágenes mentales, las expresiones simbólicas; las herramientas, teoremas, algoritmos que el dispone para manipular el concepto» (Artigue, 1984; citado por Ruiz, 1993).

En Junio de 1982, en una exposición en la segunda Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas, Vergnaud (1982, citado por Ruiz 1993) presenta la noción de concepción como un objeto global relacionado con un concepto matemático, en el sentido en que puede asumirse como el estado de un concepto en un momento específico (que puede ser histórico) aceptado por una comunidad. Presenta una definición de la noción de concepción como la tripla (S, I, s) donde: «S» se interpreta como un conjunto de situaciones que dan un sentido al concepto, «I» es el conjunto de invariantes operatorias asociadas al concepto y «s» denota el conjunto de significantes que permiten representar el concepto sus propiedades y las situaciones que permite apprehender.

Balacheff (1984, citado por Ruiz, 1994) presenta una caracterización de las concepciones y se refiere a éstas como:

«un estado cognitivo corriente de los estudiantes con respecto a algún concepto matemático. Más de una concepción puede estar asociada al mismo tiempo a un concepto. Una concepción puede estar caracterizada por: (i) Un conjunto de problemas específicos, (ii) Un sistema de representaciones simbólicas asociadas al concepto y a las propiedades y situaciones a las que se refieren y (iii) Un conjunto de reglas de acción y sus atributos relativos.» (El Bouazzaoui, 1988, citado por Ruiz 1993).

Así, las concepciones se definen como dominios coherentes de prácticas cognitivas y se representan como una cuaterna (P, R, L, C) de sistemas interrelacionados, donde: «P» se interpreta como los problemas que normalmente se pueden resolver, «R» se refiere a los operadores que normalmente manejan esos problemas, «L» indica los sistemas de representación que permiten expresar y atacar esos problemas y «C» hace referencia a las estructuras de control (incluyendo los tipos de prueba) que permiten determinar si un problema ha sido resuelto satisfactoriamente.

Por su parte, Duroux (1982), proporciona una definición de concepciones en la cual se refiere a estas como el saber o conocimiento de carácter local que operan sobre subgrupos del campo conceptual y en ciertos valores de las variables en situaciones concretas. Dichas concepciones aparecen en aquellas situaciones que resultan privilegiadas por diversas causas en detrimento de otras durante el desarrollo del proceso de adquisición del conocimiento.

Tall y Vinner (1981), aunque no definen el término concepción, desarrollan una teoría en la cual relacionan los significados que para ellos tiene la definición de un concepto «*concept definition*» y las imágenes que de este concepto «*concept image*» desarrollan los estudiantes: «*llamaremos «concept image» a la estructura cognitiva completa que está asociada al concepto, la cual incluye representaciones mentales, propiedades asociadas y procesos. Se construye a través de los años con experiencias de todo tipo, cambia si el individuo se encuentra con nuevos estímulos y madura de este modo*» (Tall y Vinner, 1981).

Para estos autores, los estudiantes relacionan con la vida real la mayoría de las nociones introducidas en matemáticas. De esta manera, construyen una estructura cognitiva suficientemente compleja y asociada a cualquier noción matemática. Las definiciones ri-

gurosas y formales a las que con posterioridad deben enfrentarse en la construcción formal de un concepto matemático no sustituyen en forma inmediata a toda la complejidad de esta estructura cognitiva. Ésta a su vez, ha de contener además de las definiciones formales de dicha noción, diversas representaciones, modelos, ejemplos, contraejemplos, imágenes mentales en relación con otras nociones.

Todos los conceptos matemáticos excepto los primitivos, tienen definición. Muchas de estas definiciones se introducen en los programas de matemáticas; sin embargo, los escolares no necesariamente las usan cuando tratan con ejemplos o contraejemplos de un concepto; en la mayoría de los casos deciden con base en una imagen conceptual, es decir, teniendo en cuenta todo un conjunto de esquemas mentales asociados a dicho concepto. En este ámbito de interpretación, las definiciones expuestas por los estudiantes sobre algunos conceptos matemáticos difieren significativamente de la definición formal de dicho concepto, «*son una descripción de la imagen conceptual que personalmente hayan construido*». Este tipo de definición es denominado «*definición personal*» y se considera como una parte integrante de la propia «*concept image*».

Moreno (2001) en sus trabajos relacionados con la caracterización de los profesores, interpreta los resultados con el objeto de establecer posibles conexiones entre los planos de pensamiento y de las acciones que se concretan en la creencia particular de cada profesor respecto de su práctica docente. Este autor establece una distinción entre los términos creencias y concepciones, asumiendo para el segundo una acepción cognitivista y refiriéndose acerca del mismo de la siguiente manera:

«Las concepciones son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes men-

tales, preferencias etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan. El carácter subjetivo es menor en cuanto se apoyan sobre un sustrato filosófico que describe la naturaleza de los objetos matemáticos». (Moreno, 1995; citado por Preafán y Bravo, 2002).

Rodríguez (1999), argumenta en relación de las concepciones en una perspectiva de asociación con: *conceptos erróneos, concepciones alternativas, nociones ingenuas, nociones pre-científicas, etc.*; las concepciones alternativas se refieren a los conocimientos previos del sujeto al momento de abordar el estudio de una nueva entidad matemática, el término «concepción» tiene gran proximidad con la noción de concepto, infiere un sentido propio en la construcción de representaciones mentales del sujeto acerca de entidades abstractas, el adjetivo «alternativas» establece una distinción respecto de las concepciones sobre entidades matemáticas formalmente establecidas y las ideas previas del sujeto acerca de las mismas. Desde este enfoque, puede establecerse una caracterización de las concepciones en función de elementos distinguidos para los conceptos. En este sentido, acerca de las concepciones alternativas de los sujetos puede decirse que son representaciones incorrectas o incompletas de clases que pueden ser de distinto tipo. Tales representaciones pueden darse en función del concepto, del contexto, del nivel de conocimiento del sujeto, entre otras.

Sfard (1991), se refiere a las concepciones como grupos de representaciones de carácter personal y subjetivo que son evocadas por el concepto al interior de los procesos de pensamiento del individuo, son consideradas como una contraparte del concepto formalmente establecido por la comunidad científica: *«el grupo total de representaciones y asociaciones internas evocadas por el concepto -la contraparte del concepto en el «universo formal del saber humano» interior y subjetivo- será entendido como una concepción.»* (Sfard, 1991)

Los conceptos, nociones o abstracciones matemáticas de los cuales puede afirmarse que son accesibles únicamente por la mente humana y que están completamente por fuera del alcance de nuestros sentidos, independientemente de los diversos tipos de representaciones que les sean asociados (por ejemplo para el concepto de función podemos referir algunos tipos de representación: lenguaje natural, expresión algebraica, gráfica sobre un sistema de coordenadas, tabla de datos, entre otras), son estudiados desde la teoría propuesta por Sfard, incorporando simultáneamente el tratamiento ontológico (propio de la naturaleza de las entidades matemáticas) y psicológico (propio de la manera como son percibidas por quien piensa en las mismas). Estas representaciones constituyen la concepción del sujeto, no obstante, tales representaciones sólo pueden ser evidenciadas a través de manifestaciones externas como dibujos, expresiones en lenguaje natural (orales o escritas), símbolos, gráficos, objetos físicos, etc.

En esta teoría, se establecen para la adquisición de conceptos dos enfoques: estructural (como objetos totalmente acabados) y operacional (como procesos, algoritmos o acciones conducentes a la formación de nuevos conceptos). De estos enfoques fundamentalmente distintos pero complementarios, se puede afirmar que intervienen al interior de las diversas fases en los procesos de aprendizaje o construcción del conocimiento matemático y del desarrollo del pensamiento matemático. Tales enfoques son entendidos respectivamente como concepciones operacionales y estructurales acerca de una misma noción matemática, en este sentido, se hace referencia al carácter dual de las concepciones, por cuanto una noción matemática puede entenderse simultáneamente como un proceso o como una estructura completamente unificada.

En la concepción operacional subyacen las ideas de secuencialidad, detalle y dinámica, se piensa en

un concepto matemático como algo potencial que existe en la medida de una secuencia de acciones conducentes a la adquisición del mismo; mientras que en la concepción estructural, un ente matemático se entiende como un objeto o una estructura estática, una unidad que existe, algo totalmente integrado susceptible de ser manipulado como un todo sin prestar atención a los detalles o los elementos que eventualmente lo puedan conformar. Así, la diferencia fundamental y de carácter cualitativo entre estos dos tipos de concepciones, radica principalmente en las creencias básicas e implícitas respecto de las nociones matemáticas. En el proceso de construcción de conocimiento se debe considerar la viabilidad del mismo, en la medida que sólo es factible, en tanto que sea sugerido por las estructuras de pensamiento logradas y por los diversos tipos de relaciones posibles entre conocimientos previamente adquiridos y las nociones que se espera sean incorporadas. Se dice que hay una relación intrínseca entre el sujeto y el objeto de conocimiento, se consideran inseparables y en mutua construcción. En el proceso de aprendizaje se desarrollan las estructuras de pensamiento que posibilitan la adquisición de nuevos conocimientos. Del mismo modo, se considera que el punto de partida en la construcción del conocimiento como evento secuencial (no lineal) es la interacción entre el sujeto y el objeto de conocimiento mismo.

Como tratamiento psicológico-epistemológico del proceso de construcción del conocimiento y el desarrollo del pensamiento matemático, podría afirmarse, considerando el discurso de Sfard, que el enfoque operacional es el primer paso en la adquisición de nuevos conocimientos. Al parecer, la evolución desde los estados operacionales a la conformación de los conceptos matemáticos como estructuras completamente integradas, consiste en un proceso intrincado en el cual intervienen linealmente las fases: *interiorización*, *condensación* y *reificación*.

Interiorización: es la etapa de estructuración conceptual en la cual, el sujeto interactúa con procesos de carácter operacional asociados con los conceptos matemáticos, ganando con la experiencia habilidad en la manipulación de tales operaciones. Le permite posteriormente interiorizar elementos característicos propios del concepto en su estado formal dentro de la teoría matemática.

Condensación: es la fase en la cual aparecen secuencias de operaciones comprimidas en unidades de menor complejidad, más manejables y conducentes a la interiorización de los procesos como eventos totalizantes, libres del tratamiento de los detalles. Debido al estado conceptual alcanzado durante esta fase, tareas como combinar procesos, hacer comparaciones, lograr generalizaciones, alternar entre diversas representaciones de un mismo concepto, entre otras, resultan de gran facilidad para el sujeto. Al conjunto de eventos relacionados con esta fase, se asocia lo referente al surgimiento de nuevos conocimientos propiamente dichos, es decir, se considera que es el instante en el cual nace «formalmente» un nuevo conocimiento.

Reificación: incorpora un «*movimiento ontológico*» -una habilidad repentina para ver algo familiar en una luz totalmente nueva-, un salto instantáneo, un proceso de facto solidificado en un objeto, en una estructura estática» (Sfard, 1991). La reificación, permite al sujeto identificar diversos tipos de representaciones (símbolo, lenguaje natural, expresión algebraica, gráfica, etc.), para una nueva noción matemática, sin que estas induzcan ambigüedad alguna respecto de la interpretación de la misma, del mismo modo permite iniciar sobre ésta una secuencia nueva de procesos conducentes a la estructuración de otra u otras entidades matemáticas.

En el trabajo que da origen al presente escrito, se asume el constructo teórico elaborado por Sfard para efectos de una caracterización de las concepciones

sobre el concepto de número natural de los estudiantes que conforman la población objeto de estudio. Se hace un estudio histórico y didáctico sobre el concepto de número natural y sobre el concepto mismo de concepción en didáctica de las matemáticas, esto con el fin de categorizar las concepciones encontradas en los estudiantes a partir de sus respuestas a cuestionamientos y solución de problemas típicos relacionados con el tópico matemático.

MATERIALES Y MÉTODOS

Teniendo en cuenta el objetivo principal del trabajo investigativo, el estudio que se propuso corresponde a uno de naturaleza cualitativa, con un diseño de tipo descriptivo. La razón por la cual se recurre a un modelo cualitativo, consiste en que un enfoque de este tipo, permite acceder de manera más efectiva a los procesos afectivos y cognitivos que experimentan los estudiantes en la construcción del conocimiento. Es un trabajo descriptivo, en tanto que tiene como objeto, medir en una población bien determinada una o más variables dependientes, con base en una serie de tareas que en este caso permiten evidenciar las concepciones de la población objeto de estudio. Esta investigación es de tipo básico, en el sentido que pretende comprender un fenómeno sin intervenir para modificarlo; seccional, por cuanto se refiere a un momento específico dentro del proceso de desarrollo del fenómeno considerado como objeto de estudio (Sierra, 2001).

El trabajo se desarrolla en cuatro fases: elaboración y aprobación del anteproyecto, elaboración del marco teórico, identificación de las concepciones y consolidación de las conclusiones. La primera consiste en la definición del problema, la estructuración del anteproyecto y puesta del mismo en consideración ante las instancias pertinentes para su visto bueno y aprobación.

En la segunda fase, se estructura el marco teórico atendiendo diversos referentes encontrados en la literatura que tratan sobre las concepciones en didáctica de las matemáticas, el desarrollo histórico del concepto de número natural y la formalización matemática de dicho concepto, esto con el fin de establecer una caracterización de los tópicos: concepción en didáctica de las matemáticas y el concepto de número natural desde el formalismo de las mismas. Se espera especificar el sentido y el enfoque en el uso del término concepción e identificar las concepciones de número natural que se inducen en algunos de los apartes más relevantes en la historia del concepto y en los textos de mayor aceptación e importancia en los cuales se trata dicho concepto.

En la tercera fase, se desarrolla el proceso de observación, definiendo inicialmente la población, que en este caso consiste en todos los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Ciencias de la Computación en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de La Salle, dado que el número de estudiantes en el programa así lo permite. En el proceso de observación, para la consecución de la información se utiliza una técnica no interactiva que consiste en un cuestionario de preguntas (preferiblemente abiertas), en el cual los estudiantes plasman sus ideas acerca del concepto de número natural, sus usos en diversos contextos y su relación con otros tópicos matemáticos; dicho cuestionario fue auto-administrado de manera escrita, para lo cual se dispuso de una sesión de dos horas en cada uno de los grupos de estudiantes (por semestre), aprovechando los espacios de clase regular facilitados por algunos profesores. En este caso, se realiza una observación no directa, en tanto que los hechos se evidencian a través de las manifestaciones presentadas por los estudiantes frente a algunas tareas que tienen relación con el tópico matemático en consideración.

El análisis se realiza con base en la caracterización de las concepciones en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, el análisis historiográfico del número natural y las potenciales concepciones obtenidas de las respuestas de los estudiantes a las preguntas planteadas en el cuestionario.

RESULTADOS

A manera de descripción de las actividades realizadas durante el proceso de verificación, se hace referencia a las categorías de análisis dispuestas para la interpretación y análisis de las respuestas de los estudiantes; luego, se presentan los resultados obtenidos a partir de la tabulación, análisis y codificación de dichas respuestas y finalmente, con base en este proceso, se determina cuáles son las concepciones sobre el número natural que tienen los estudiantes de la Licenciatura. Se toma en consideración la caracterización de las concepciones desde los diversos autores consultados, las concepciones identificadas en el estudio historiográfico del número natural, el análisis de textos y otros posibles tipos de concepciones que sean identificadas en las respuestas de los estudiantes.

Se describen los resultados, en relación con la pregunta de investigación, las variables y las categorías de análisis establecidas. Se considera que las preguntas seleccionadas para el cuestionario, constituyeron una muestra representativa de las múltiples situaciones posibles asociadas con los números naturales, en relación con las tres variables que fueron establecidas para el estudio.

En cuanto al análisis de resultados del cuestionario, en primera instancia se debe mencionar, que las preguntas propuestas son predominantemente abiertas, por lo cual no se establecieron categorías de análisis previas a su aplicación (Hernández *et al.*, 1998); de hecho, las categorías se establecieron con base en las principales inclinaciones o tendencias encontradas

en las respuestas proporcionadas por los estudiantes y determinadas en un proceso de tabulación de los datos obtenidos como resultado de la aplicación del cuestionario.

Las categorías en las cuales se clasificaron las preguntas son las siguientes:

AA. Algoritmos antiguos; pregunta 7, **AP.** Origen o utilidad en relación con actividades prácticas preguntas 1b, 1c; **AU.** Algoritmo usual de la multiplicación pregunta 7; **BN** Uso de una biyección con el conjunto de los números naturales pregunta 2; **CA.** Sistemas de numeración de las culturas antiguas preguntas 5, 13f, 13h; **EC.** Enunciado no relacionado con alguna definición formal, usando expresiones cotidianas pregunta 1a; **F.** Falso pregunta 12; **IA.** Origen o utilidad por interés académico preguntas 1b, 1c; **IF.** Enunciado incompleto equivalente a alguna definición formal pregunta 1a; **NCPIM.** No conocen el principio de inducción matemática pregunta 1d; **NNC.** Los números naturales se conciben como un campo pregunta 3, 9; **O.** Otras preguntas 1b, 1c, 1e, 2, 4; **PA.** Propiedades de carácter algebraico pregunta 1e; **PC.** Propiedades relacionadas con el conjunto pregunta 1e; **PD.** Algoritmos con base en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición pregunta 7; **RC.** Uso de representaciones de los conjuntos pregunta 2; **RS.** Enunciado no relacionado con alguna definición formal, usando expresiones matemáticas pregunta 1a; **RT.** Representaciones teóricas preguntas 13a, 13b, 13d; **RU.** Representaciones usuales preguntas 5, 6, 13c; **SA.** Sistemas aditivos 6; **SC.** Sucesiones como subconjuntos de N pregunta 4; **SN.** La sucesión como representación de los números naturales preguntas 4, 5; **SP.** Sistemas posicionales (diferentes a base diez) preguntas 13e, 13g; **UD.** Uso de dibujos o esquemas preguntas 8, 10, 11; **UF.** Uso de fórmulas preguntas 8, 10, 11; **UT.** Uso de tablas preguntas 8, 10, 11; **V.** Verdadero pregunta 12 (Restrepo y Torres 2006).

Una vez establecidas las categorías de análisis, se procedió a la codificación y tabulación de los datos obtenidos. De los 21 cuestionarios aplicados se analizaron 18 únicamente, debido a que los demás estudiantes se negaron a entregar las pruebas resueltas (esto se atribuye a la posible prevención de ser observados en su dominio conceptual).

Ahora se presentan los resultados correspondientes al análisis realizado en relación con las variables establecidas.

Variable 1. Representaciones del número natural: en general, los estudiantes reconocen como representación de los números naturales algunas de las representaciones simbólicas para este conjunto numérico que vienen de la antigüedad, como: el sistema de numeración romano y en menor medida, los sistemas Maya e Inca. De forma similar ocurre con la manera de escribir los números naturales, dado que es significativamente alta la aparición de sistemas de tipo posicional y en particular el sistema de numeración de base diez. Esto permite inferir una comprensión del principio fundamental que da sentido a tales sistemas de numeración, aun que del mismo modo, se infiere también poca preocupación por el uso de bases diferentes a la base diez. Al parecer, para este grupo de estudiantes éste sistema de numeración es un sistema de numeración natural, en tanto que no se encuentra cuestionamiento alguno sobre la manera en que influye dicho sistema de numeración y el tipo de escritura asociado con este en los algoritmos que usualmente se emplean para la realización de las operaciones fundamentales, esto se puede observar en virtud de las reproducciones que algunos estudiantes presentaron del algoritmo usual para la multiplicación, aun que ninguno expuso explicación alguna sobre el mismo.

También se encuentra que los estudiantes tienen representaciones sobre sistemas de numeración de tipo aditivo, en particular la usada por el hombre

primitivo, en la cual, cada objeto se representa mediante una marca o señal sobre otro objeto que le sirve de superficie para la escritura, destacándose en algunas ocasiones la agrupación y la asignación de nuevos signos para reducir la escritura. Tales representaciones concuerdan con la idea de número natural como representación de un proceso de conteo o de una cantidad, las cuales aparecen con significativa regularidad en las respuestas de los estudiantes. Mientras que, las representaciones que definen el número natural desde el formalismo matemático, como la de Peano o la de Frege, no son reconocidas por los estudiantes o mejor aún, no conocen tales definiciones formales.

Las representaciones de tipo geométrico, como las configuraciones puntuales estudiadas por los pitagóricos para asociar los números naturales o en procesos relacionados con estos, no son reconocidas por los estudiantes, sin embargo la tradicional representación mediante puntos asociados a cada objeto contado es bien reconocida por ellos.

Variable 2. Situaciones asociadas al concepto de número natural: para el grupo de estudiantes es bien conocido el uso de los números naturales en situaciones de conteo, no obstante la carencia de herramientas para la resolución de problemas en los cuales los tipos de conteo no son directos, particularmente en situaciones en las cuales el establecimiento de conjeturas facilita significativamente los procesos.

Los estudiantes reconocen como principal fin y origen de los números naturales la representación de procesos de conteo, desde un punto de vista práctico, para la solución de problemas en la cotidianidad. Ninguno de los estudiantes reconoce el significado del proceso matemático de contar, aunque implícitamente hacen uso de la biyección entre los elementos del conjunto a contar y los números naturales. Estos dos aspectos muestran la percepción

de los estudiantes respecto a la importancia de los objetos matemáticos, en su utilidad práctica y no como objetos de estudio en sí mismos y como parte de teorías matemáticas.

En cuanto a otros tópicos relacionados con los números naturales, los estudiantes reconocen las operaciones: suma y la multiplicación, como operaciones aritméticas definidas en este conjunto numérico, una como agrupaciones y otra como sumas repetitivas respectivamente. Es evidente la falta de conocimiento sobre algoritmos diferentes a los usuales para efectuar tales operaciones (exceptuando tres casos) de la misma manera, no presentan argumentos consistentes para la explicación de los mismos, para dar un ejemplo, al intentar plagiar tales algoritmos a un sistema de numeración de tipo aditivo, donde la suma no requiere «llevar cifras, como se hace en el procedimiento usual para la suma».

En relación con situaciones que requieren procesos de conteo más elaborados, los estudiantes usan apropiadamente los números naturales, sin embargo, se notan dificultades en el desarrollo de procesos inductivos, en el sentido que no expresan fácilmente conclusiones o conjeturas con base en la información que obtienen de gráficos o tablas. Para expresar información que proviene de problemas específicos, los estudiantes preferentemente usan como herramienta la construcción de tablas mediante las cuales se condensa dicha información; sin embargo, pocos son los casos en los cuales logran establecer regularidades de las secuencias presentadas, ocasionalmente emplean fórmulas conocidas, pero no se evidencia mayor comprensión de las mismas, por cuanto no siempre son útiles para la situación que pretenden resolver, sino para otras similares. Se observó que los estudiantes no poseen mayor habilidad para leer información en gráficos o esquemas. Fueron muy pocos quienes contestaron el cuestionamiento que da cuenta de

esto y entre quienes lo hicieron, orientaron su atención por vías inconducentes para hallar la suma de n números cuadrados que se les pedía, mediante la interpretación de un gráfico.

Variable 3. Definición de número natural: en gran medida, los estudiantes emplean expresiones provenientes del lenguaje común para la definición de los números naturales, al parecer, por considerarlos demasiado evidentes o intuitivos, de esto se infiere que muy pocos de ellos elaboran definiciones utilizando terminología matemática y en los pocos casos que ocurre, los enunciados no pueden considerarse consistentes dado que en su gran mayoría no corresponden con las nociones propias del formalismo matemático. Se encuentran con bastante regularidad algunos de los elementos de la construcción teórica presentada por Peano para la definición de los números naturales, aunque sin la precisión necesaria para considerarlos apropiados para tal efecto; en general no se evidencia de ninguna de las respuestas algún enunciado lo suficientemente consistente para definir el concepto de número natural, al parecer esta particularidad no había sido considerada como objeto de análisis y profundización. Lo anterior, contrasta significativamente con la preferencia de los estudiantes por considerar el número natural como representación de una cantidad o la expresión de un proceso de conteo.

Las propiedades del conjunto numérico son entendidas en su mayoría por los estudiantes, como aquellas de carácter algebraico o lo que es lo mismo, entienden como propiedades del conjunto de los números naturales las que son propias de las operaciones definidas en dicho conjunto. Al parecer, no hay suficiente comprensión del significado de estas propiedades o de las posibilidades que ofrece el conjunto numérico como tal. Un número bastante significativo de las respuestas, dan cuenta de la comprensión del conjunto de los números na-

turales con las operaciones suma y multiplicación, como un campo o cuerpo, estructura que es propia del conjunto de los números reales, es decir, no se evidencia precisión en cuanto a la diferenciación entre los primeros y los segundos respecto del tipo de estructura algebraica propia de cada uno de los mismos.

Más de la mitad de los estudiantes desconocen propiedades del conjunto en sí mismo o le atribuyen otras que no le corresponden; por ejemplo, hacen uso de términos como convergencia o intervalos, propios de conjuntos continuos, característica de la cual carecen los números naturales. De la misma manera, el principio de inducción matemática, tal vez una de las características más importantes que distingue a los números naturales, es totalmente desconocido para ellos, la mayoría asocia el nombre con el proceso de inducir (de las partes a lo complejo), no reconocen en éste uno de los esquemas de demostración propios de las matemáticas; de hecho, propio de este conjunto numérico.

Las propiedades o definiciones relacionadas con la divisibilidad y el orden son más familiares para este grupo de estudiantes, por lo menos desde lo que puede inferirse de las respuestas a la pregunta diseñada para identificar este particular. Pero en virtud de la ausencia de aclaraciones o contraejemplos en las respuestas, no es posible determinar con más exactitud sus ideas frente a estas propiedades.

Por último, es de resaltar el hallazgo de la creencia que el concepto de número, no va más allá del concepto de número natural, a pesar del conocimiento sobre los diversos conjuntos numéricos que se supone han logrado en el tratamiento de los contenidos propios de los diversos espacios académicos cursados en los distintos momentos del desarrollo del programa.

CONCLUSIÓN

Con base en el análisis anterior, es posible determinar las siguientes concepciones generales en el grupo de estudiantes observado, que si bien no son correctas en el sentido que no corresponden a alguna de las definiciones formalmente establecidas en matemáticas, si describen las ideas que tienen los estudiantes de la Licenciatura sobre los números naturales:

«Los números naturales como la representación de una cantidad. Los estudiantes tienen la concepción, tal vez derivada de la cotidianidad y de la enseñanza primaria, que los números naturales son la representación de una cantidad de objetos, determinada mediante un proceso de conteo. Si bien esta apreciación es correcta, no corresponde con alguna definición formal de número natural, por lo menos de forma explícita en los argumentos que ellos exponen, pues no se evidencia una comprensión lo suficientemente elaborada del proceso matemático de contar, sino sólo a nivel intuitivo, como seguramente surgió en el hombre primitivo y fue manejado por las civilizaciones de la antigüedad. Esta concepción, de acuerdo con la tipificación de Sfard (1991), es de tipo operacional, pues corresponde con un proceso. Las representaciones son de tipo verbal y simbólico, de acuerdo con diferentes sistemas de numeración reconocidos y aceptados por los estudiantes.

Los números naturales como un campo. Esta concepción se refiere al imaginario que tienen algunos estudiantes sobre que los números naturales son un campo, adicionándole propiedades que en este conjunto no se cumplen, por la inexistencia de los elementos que allí se invocan. Esta concepción, contrario a la anterior, es de tipo estructural, pues implícitamente conciben los números naturales como objetos en sí mismos, sin querer decir con ello que ésta corresponda a un saber matemático

propriadamente establecido, pues ya se ha señalado la imprecisión de ésta. Las representaciones en este caso son de tipo simbólico, en el enunciado de las propiedades y en su uso para resolver ecuaciones» (Restrepo y Torres, 2005).

La primera concepción, pone de manifiesto que a pesar de la enseñanza convencional «*en la secundaria y en la misma universidad*», en las cuales los estudiantes han utilizado los números naturales, sus estructuras cognitivas permanecen inalteradas, sus ideas ingenuas acerca de esta noción matemática continúan bien arraigadas; es decir, tales procesos de enseñanza no logran afectar las ideas cotidianas de los estudiantes acerca de algunas nociones matemáticas como la noción de número natural. Al parecer, en correspondencia con los postulados en algunas investigaciones recientes (Flórez, citado por Mora *et al.*, 2004), los estudiantes ajustan y acomodan la nueva información aprendida a sus viejos puntos de vista en vez de alterarlos o modificarlos.

La segunda concepción evidencia cierta ausencia de precisión para establecer conceptos matemáticos durante el desarrollo de procesos de carácter constructivo, dado que en este grupo de estudiantes se encontró que asumen estructuras primarias absorbidas por estructuras de mayor complejidad, perdiendo en el proceso las primeras su naturaleza e incorporando propiedades nuevas que no les corresponden y desplazando las existentes.

También, cabe resaltar como conclusión, el establecimiento de tres concepciones históricas (*número natural como representación de un conteo, tratamiento aritmético de los números naturales, número natural como objeto matemático*) y dos del estudio didáctico

de los textos (*número natural como la secuencia 1,2,3,...; número natural como ente matemático definido axiomáticamente, concepción operacional*) las cuales, infortunadamente no corresponden con los resultados encontrados en la población estudiada; excepto tal vez, la visión un poco superficial sobre los números naturales presentada en dos de los textos observados.

AGRADECIMIENTOS

A los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Ciencias de la Computación: Ingrid Catalina Mahecha, Hugo Ernesto Chávez y Andrés Eduardo Blanco, quienes muy diligentemente colaboraron en diversas actividades relacionadas con la consolidación del marco conceptual.

A los profesores del departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación, quienes muy amablemente cedieron sus espacios para la aplicación de los instrumentos en la recolección de los datos.

A la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias de la Educación, de donde recibimos permanentemente indicaciones y orientación para el buen desarrollo del proyecto.

A la Facultad de Educación, unidad académica que aportó gran parte de los recursos con los cuales se desarrolló el proyecto.

Al Departamento de Investigaciones, dependencia de la cual recibimos su apoyo, orientación y asesoría permanentes durante el desarrollo del proyecto y parte de los recursos económicos con los cuales se desarrolló el estudio.

BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M. «Epistémologie et didactique». *Reserches en Didactique des mathématiques* 10 23. Traducción de María Fernanda Espitia, 2001 (manuscrito).
- Carulla, M. y Gómez, P. *El Análisis de Contenido Matemático como Herramienta para la Construcción de Modelos Pedagógicos: El caso de la función cuadrática* Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes, Una Empresa Docente, 1998.
- Farias, E. et al. «Números Reais: Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura». *Publicado en Zetetiké*. 7 12, 1999.
- Flores, P. *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Granada: Comares, 1998.
- Luque, C. et al. *Actividades Matemáticas para el Desarrollo de Procesos Lógicos: Los Procesos de contar e inducir*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2002.
- Mora, L. y Torres, J. *Concepciones de Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre Números Reales*. Bogotá: Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional, 2004.
- Moreno, M. «El pensamiento del profesor. Evolución y estado actual de las investigaciones». Preafán, G. y Bravo, A. *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas internacionales*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, Grupo Editorial Gaia (2002): 61-78.
- Ojeda, A. y Parra, J. *Concepciones en docentes de preescolar y básica primaria hasta sexto grado, acerca de la noción de número natural*. Bogotá: Tesis de Maestría en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, 1997.
- Ruiz, L. *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. Granada: Tesis doctoral. Universidad de Granada, 1993.
- Restrepo, J. y Torres, J. *Caracterización de las concepciones de estudiantes para profesor de matemáticas sobre el concepto de número natural*. Bogotá: Informe sobre investigación desarrollada en la Universidad de La Salle, 2005.
- Sierra, B. *Técnicas de Investigación Social. Teoría y ejercicios* (Décimo cuarta edición). España: Thomson Paraninfo, 2001.
- Sfard, A. «On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin». *Educational Studies in Mathematics* (1991): 1-36.
- Tall, D. y Vinner, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* (1985). <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html>>
- Thompson, A. «Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of research». D. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Nueva York, Macmillan (1992): 127-146.
- Tirosh, F. et al. *Prospective Elementary Teachers Conceptions of Rational Numbers*. <<http://jwilson.coe.uga.edu/Texts/Folder/Tirosh/Project.html>> [2000].